数理解析研究所講究録
442巻 1981年 98-111

KNOT SURGERY DESCRIPTIONS OF SOME CLOSED ORIENTABLE 3-MANIFOLDS

津田塾大学　　円山憲子

本稿の目的は. homology 3-球面内の knot の exterior を二つ張り合せて得られる closed orientable 3-manifolds の knot surgery 表現を求めることである。

§1 準備

1.1 定義. smooth oriented category で議論を進める。Σ を homology 3球面, K を Σ 内の oriented knot とする。$N(K)$ を K の 0-framed tubular neighborhood とする。即ち、$N(K) \cong S^1 \times D^2$, $S^1 \times \{*\} \sim 0$ in $\Sigma - \mathring{N}(K)$, $* \in \partial D^2$ となっている。$X = \Sigma - \mathring{N}(K)$ と置いたものを K の exterior という。X の向きは. Σ と K のそれから自然に決まるものである。∂X はいつでも $S^1 \times \partial D^2$ と同一視され, 座標は (θ, φ), $0 \leq \theta, \varphi < 2\pi$ で入れる。$\ell = S^1 \times \{*\}$ $(* \in \partial D^2)$, $m = \{*\} \times \partial D^2$ $(* \in S^1)$ なる ∂X 上の loops を各々 K の longitude, meridian という。$\lambda = [\ell]$,

$\mu = [m]$ は $H_1(\partial X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ の生成元である。

1.2 $\underline{M(K_1, K_2 : A)}$: K_i を homology 3球面 Σ_i 内の oriented knot, X_i を K_i の exterior とする $(i=1,2)$。$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$ s.t. $\det A = -1$ に対して,

$$h(\theta_1, \varphi_1) = (a\theta_1 + b\varphi_2,\ c\theta_1 + d\varphi_2)$$

により、向き逆転の同相写像 $h : \partial X_1 \to \partial X_2$ が決まる。よって $h_* : H_1(\partial X_1) \to H_1(\partial X_2)$ は,

$$h_* \langle \lambda_1, \mu_1 \rangle = \langle \lambda_2, \mu_2 \rangle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

となることがわかる。この h で X_1 と X_2 を張り合せて得られる 3-manifold $X_1 \cup_h X_2$ は, h が向き逆転であるから X_1 と X_2 のそれから決まる自然な向きを持っている。この closed orientable 3-manifold を $M(K_1, K_2 : A)$ $(= X_1 \cup_h X_2)$ と表わす。

$M(K_1, K_2 : A)$ の性質を上げておく:

(1) $M(K_1, K_2 : A) = X_1 \cup_h X_2 \cong X_2 \cup_{h^{-1}} X_1 = M(K_2, K_1 : A)$。

(2) $M(O, K ; A) \cong \chi_\Sigma(K : c/a)$,

ただし, O は S^3 内の trivial knot, K は homology 3-球面 Σ 内の knot で, $\chi_\Sigma(K : c/a)$ は Σ を K に沿って type a/c の Dehn surgery を施して得られる closed orientable 3-manifold。

(3) $M(K_1, K_2 : A)$ は,

$$H_1(M(K_1, K_2 : A)) \cong \mathbb{Z}/|c|\mathbb{Z}。$$

(2)は、$N(K)\cong S^1\times D^2$ と $X(0)\cong D^2\times S^1\cong S^3-\mathring{N}(0)$ との同相写像(向き逆転)が $(x,y)\mapsto (y,x)$ で与えられることと、Dehn 構成して得られるものの topological type が $N(K)$ の meridian の行き先で決まることからわかることを注意しておく。

1.3 *Surgery on solid torus*. J を solid torus $S^1\times D^2$ 内部の simple closed curve (s.c.c) で、$J\not\subset B^3$ in $S^1\times D^2$ かつ $J\neq$ core of $S^1\times D^2$ を満たすようなものとする。

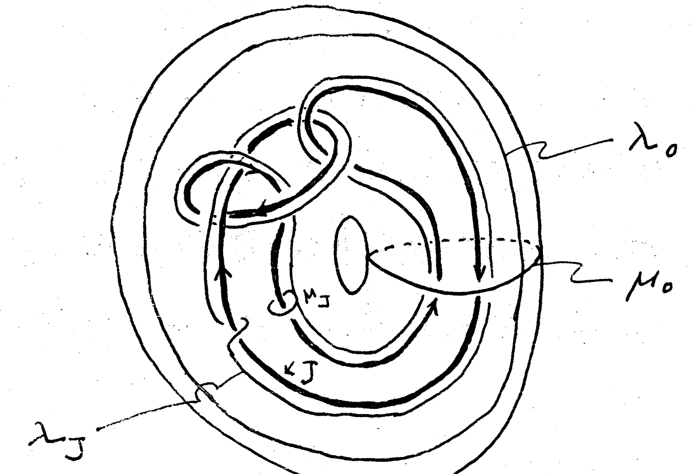

図1. $J\subset S^1\times \mathring{D}^2$ $(w=0)$

J の winding 数 w は、$\mathrm{Im}[H_1(J)\to H_1(S^1\times D^2)]=w\mathbb{Z}$ によって決まる non negative integer である。$\lambda_0=[S^1\times *]$ $(*\in\partial D^2)$, $\mu_0=[*\times\partial D^2]$ $(*\in S^1)\in H_1(S^1\times\partial D^2)$ とする。$S^1\times D^2$ 内での J の 0-framed tubular neighborhood $N(J)$ は、$g: S^1\times D^2\cong N(J)$

s.t. $g(S^1\times\{0\}) = J$, $g(S^1\times\{*\})$ $(*\in\partial D^2)\sim w\lambda_0$ in $S^1\times D^2 - \mathring{N}(J)$ により与えられる。 μ_J を $N(J)$ 内で null homotopic な loop の $H_1(\partial N(J))$ での class, $\lambda_J = [g_*(S^1\times *)]$ $(*\in\partial D^2)\in H_1(\partial N(J))$ とする。λ_J, μ_J が J の $S^1\times D^2$ における longitude と meridian である。 $Y = S^1\times D^2 - \mathring{N}(J)$ を J の $S^1\times D^2$ における exterior という。$\partial Y = S^1\times\partial D^2 \cup \partial N(J)$ であるが、以下 $\partial_0 Y = S^1\times\partial D^2$ と表わす。従って、 $\partial Y = \partial_0 Y \cup \partial N(J)$. 以上のことから、$m/n \in \mathbb{Q}\cup\{\infty\}$ $(\infty = \frac{\pm 1}{0})$ に対し、J に沿って solid torus に Dehn surgery を施すことができる。詳しく言えば、 $h:\partial N(J)\overset{\cong}{\to}\partial N(J)$ s.t. $h_*[\mu_J] = m\mu_J + n\lambda_J \in H_1(\partial N(J))$ なる同相写像で Y に N(J) を張り直すことにより境界を持つ 3-manifold が得られる。それを $(J: m/n) = Y\cup_h N(J)$ と表わす。
$\partial(J: m/n) = \partial_0 Y$ である。

次の補題は [G, Lemma 3.3.] から得られる。

<u>補題1.</u> $(w, m) = 1$ <u>のもとで</u>

(1) $H_1((J: m/n)) \cong \mathbb{Z}$.

(2) $\mathrm{Ker}[H_1(\partial(J: m/n)) \to H_1(J: m/n)]$ $(\cong\mathbb{Z})$ <u>は</u>

μ_0 $(w=0)$ <u>又は</u> $nw^2\lambda_0 + m\mu_0$ $(w\neq 0)$ <u>で生成される。</u>

1.4 <u>定義.</u> $\varphi_K: S^1\times D^2 \overset{\cong}{\to} S^1\times D^2$ を

$$\varphi_K(\theta, (r, \varphi)) = (\theta, (r, K\theta+\varphi))$$

で与えられる同相写像とする。φ_k を k-twist homeomorphism と呼ぶことにする。$(\varphi_k|\partial)_* : H_1(S^1 \times \partial D^2) \to H_1(S^1 \times \partial D^2)$ は，

$$(\varphi_k|\partial)_* \langle \lambda_0, \mu_0 \rangle = \langle \lambda_0, \mu_0 \rangle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

となっている。

J を 1.3 のような $S^1 \times \mathring{D}^2$ 内の s.c.c とする。$J_k = \varphi_k(J)$ と置く。K を homology 3-sphere 内の knot とし，$f : S^1 \times D^2 \xrightarrow{\cong} N(K)$ を K の 0-framing とする。$J(K) = f(J)$ を K の satellite，$J_k(K) = f(J_k)$ を K の k-twisted satellite という。

§2. 主定理

定理 1. K_i を homology 3 球面 Σ_i 内の knot，X_i を K_i の exterior とする $(i=1,2)$。winding 数 w のある simple closed curve $J \subset S^1 \times \mathring{D}^2$ で，$J \not\subset B^3 \subset S^1 \times \mathring{D}^2$ かつ J は $S^1 \times D^2$ の core と異なるものが存在し，また $m/n \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ で $(m, n) = 1$ を満たすものが存在して，$X_1 = (J : m/n)$ となり $f : \partial(J : m/n) \to \partial X_1$ が $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $(w=0)$ 又は $\begin{pmatrix} -s & t \\ m & -nw^2 \end{pmatrix}$ $(w \neq 0)$ $\det B = -1$ で与えられるとする。さらに $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ $(w=0)$ 又は $\begin{pmatrix} nw^2 & t \\ m+knw^2 & kt+s \end{pmatrix}$ $(w \neq 0)$，$k \in \mathbb{Z}$ とする。この時，$M(K_1, K_2 : A)$ は，Σ_2 を K_2 の k-twisted satellite $J_k(K_2)$ に沿って type $\frac{m}{n} + kw^2$ の Dehn surgery を施して得られる。

$$M(K_1, K_2; A) \cong \chi_{\Sigma_2}(J_k(K_2) ; \tfrac{m}{n} + kW^2)。$$

証明. 仮定より $g = h \circ f : \partial(J ; \frac{m}{n}) = \partial_0 Y = S^1 \times \partial D^2 \xrightarrow{f} \partial X_1 \xrightarrow{h} \partial X_2$ は，$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ で与えられる．よって，$g_* : H_1(S^1 \times \partial D^2) \to H_1(\partial X_2)$ は $g_* \langle \lambda_0, \mu_0 \rangle = \langle \lambda_2, \mu_2 \rangle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ となっている．$M(K_1, K_2 ; A) = X_1 \cup_h X_2 \cong (J ; \frac{m}{n}) \cup_g X_2$ であるが，$(J ; \frac{m}{n}) = Y \cup_j N(J)$（$j$ は type $\frac{m}{n}$ の surgery map）より，ひとまず J に沿った surgery を忘れて，$S^1 \times D^2$ を g で X_2 に張った後，J に対応するような $S^1 \times D^2 \cup_g X_2$ 内の s.c.c. に沿って適当な係数の surgery を施せば $M(K_1, K_2 ; A)$ と同相なものが得られる。g は上のことから solid torus の meridian μ_0 を K_2 の meridian μ_2 に対応させていることがわかり，$S^1 \times D^2 \cup_g X_2$ はちょうど K_2 に沿って Σ_2 に type $1/0 (= \infty)$ の surgery を施したものである，i.e. $S^1 \times D^2 \cup_g X_2 = \chi_{\Sigma_2}(K_2 ; \frac{1}{0}) \cong \Sigma_2$。
一方，$\Sigma_2 = N(K_2) \cup X_2$，$\partial N(K_2) \to \partial X_2$ は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で与えられているので，上の同相は，$S^1 \times D^2 \cong N(K_2)$ なる同一視のもとで $\varphi_k \cup id$，$\varphi_k : S^1 \times D^2 \to S^1 \times D^2$ k-twist homeomorphism，$id : X_2 \to X_2$ で与えられていることがわかる。よって，J は $N(K_2)$ 内に $\varphi_k(J) = J_k$ で入っており，J から J_k への surgery の係数の変化は k-twist をうけて $\frac{m}{n} + kW^2$ となる．従って $M(K_1, K_2 ; A)$ は Σ_2 内の knot K_2 の satellite $J_k(K_2)$ に

沿って type $\frac{m}{n}+kw^2$ の surgery を施して得られることが言えた。□

さて、どんな closed orientable 3-manifold も必らず S^3 内のある link に沿って S^3 を surgery して得られるということは、よく知られたことである。定理1の $M(K_1, K_2 : A)$ のそのような表現について考える: $\Sigma_2 \cong \chi_{S^3}(L : \text{П})$, ここに L は有限個の成分からなる S^3 内の link, П を L の各成分に対応する surgery の係数の組（係数が ∞ となることはないとしてよい）とすれば、定理1の $M(K_1, K_2 : A)$ を表わすに必要な link は、Σ_2 に関する link $L \subset S^3$ に $J_k(K_2) \subset \Sigma_2$ に対応する knot をやはり $J_k(K_2)$ と名付けて加えたものである。$J_k(K_2)$ の S^3 に於ける surgery の係数は、$(L;\text{П})$ の linking matrix を Γ とし、$(L;\text{П}) \cup (J_k(K_2):0)$ の linking matrix $\Gamma(0)$ とした時 [Mt, corollary 2.1.1] より $(\frac{m}{n}-kw^2)-\frac{\det\Gamma(0)}{\det\Gamma}$ となることが言える。まとめると、

<u>系1.1.</u> <u>定理1の $M(K_1, K_2 : A)$ は次のようにして得られる</u>.

$$M(K_1, K_2 : A) \cong \chi_{S^3}(L \cup J_k(K_2) : \text{П}, r),$$

$$r = \left(\frac{m}{n} - kw^2\right) - \frac{\det\Gamma(0)}{\det\Gamma}.$$

次に定理1の仮定を満たすような S^3 内の knots の族を考える。

1.4 に従って. T を $S^1\times D^2$ 内部の s.c.c. で, O を trivial knot とした時, $T(O)$ が再び trivial knot となるようなものとする。$K_1=T_n(O)\subset S^3$ とする。

補題2. $K_1=T_n(O)$ に対し. solid torus 内に s.c.c. J が決まり $X_1\cong(J;-\frac{1}{n})$ で $f:\partial(J;-\frac{1}{n})\to\partial X_1$ は $B=\begin{pmatrix}0&1\\1&nw^2\end{pmatrix}$, w は T の winding 数, で与えられる。

証明。$K_1=T_n(O)\subset N(O)\subset S^3$ である。今. O の exterior の core を J' とし, J' に沿って type $-\frac{1}{n}$ の surgery を S^3 に施す。$\chi_{S^3}(J';-\frac{1}{n})\cong S^3$ である。J' に沿ってのこの surgery は, J' の exterior $\cong N(O)$ に $-n$ twist を加えることを意味する。K_1 は solid torus 内の s.c.c. T に n twist を加えたのち, O の satellite としたものであるから, 上の surgery で K_1 はほどけて trivial knot $T(O)$ となる. $T(O)$ の exterior $X\cong D^2\times S^1$ 内に J' があり. X を J' に沿って $-\frac{1}{n}$ surgery したものが X_1 と同相である。この同相写像は境界で $(\partial X\xrightarrow{\cong}\partial X_1)$, $\begin{pmatrix}1&0\\nw^2&1\end{pmatrix}$ で決まるものであることがわかる。さらに同相写像 $t:S^1\times D^2\to X$ を $t(\theta,(r,\varphi))=(\varphi,(r,\theta))$ を考え, $J\subset S^1\times \mathring{D}^2$ が $J'\subset\mathring{X}$ に対応するとすれば, J' に対した surgery 係数は. J について $-\frac{1}{n}$ の係数を定める。X_1 は solid torus $S^1\times D^2$ を J に沿って $-\frac{1}{n}$ surgery したものに同相である, $X_1\cong(J;-\frac{1}{n})$. また $t|\partial:S^1\times\partial D^2\xrightarrow{\cong}\partial X$ が $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ であることに注意すれば, $\partial(J;-\frac{1}{n})\xrightarrow{\cong}\partial X_1$ は $\begin{pmatrix}1&0\\nw^2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&nw^2\end{pmatrix}$ で決まることがわかる。□

補題2より $K_1 = T_n(0)$, $\Sigma_1 = S^3$, $m = 1$, nには$-n$を代入, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & nw^2 \end{pmatrix}$ に対して定理1及び系1.1を使えば，次の定理を得る。

<u>定理2.</u> $K_1 = T_n(0) \subset S^3$, Tのwinding数$= w$, また $A = \begin{pmatrix} -nw^2 & 1 \\ 1-knw^2 & k \end{pmatrix}$ ($\forall k \in \mathbb{Z}$) <u>とすれば，homology 3球面Σ_2内の任意のknot</u> K_2に対して，

$$M(K_1, K_2 ; A) \cong \chi_{\Sigma_2}(J_k(K_2); -\frac{1}{n} + kw^2).$$

<u>さらに</u> $\Sigma_2 = \chi_{S^3}(L ; \Pi)$ <u>とすれば</u>,

$$M(K_1, K_2 ; A) \cong \chi_{S^3}(L \cup J_k(K_2); \Pi, -\frac{1}{n} + kw^2 - \frac{\det \Gamma(0)}{\det \Gamma}).$$

次に定理2において $K_2 = O \subset S^3 = \Sigma_2$ とする。**1.2**の(1)と(2)により，$M(K_1 ; O ; A) \underset{(1)}{\cong} M(O, K_1 ; A^{-1}) \underset{(2)}{\cong} \chi_{S^3}(T_n(0); nw^2 - \frac{1}{k})$ となるから，

<u>系2.1.</u> $\chi_{S^3}(T_n(0) ; nw^2 - \frac{1}{k}) \cong \chi_{S^3}(J_k(0) : kw^2 - \frac{1}{n})$。

<u>系2.2.</u> ([B], Theorem 1). $K_i = T^i_{q_i}(0)$, w_i : <u>T^iのwinding数とする</u> $i = 1, 2$。<u>3次元多様体で</u> K_2<u>のsatellite</u>に沿って $(1-N)/q_1$ - <u>surgeryしても</u> K_1 <u>のsatelliteに沿って</u> $(1-N)/q_2$ - <u>surgeryしても得られるものがある</u>。<u>ここに</u> $N = w_1^2 w_2^2 q_1 q_2$ <u>とする</u>。

§3. 応用.

ここでは、定理2の例として cable knot surgery 表現と twisted double knot を含むある knot の class による surgery 表現について述べ、定理1の仮定を満たす例について考える。

3.1 $T(nw\pm 1, w)$ を $(nw\pm 1, w)$-torus knot とする。T として solid torus 内に $(\pm 1, w)$ torus knot を考えれば、

$$T(nw\pm 1, w) = T_n(\pm 1, w).$$

従って補題2を満たす。$J(p,q;K)$ を K の (p,q)-cable knot とすれば、定理2より次を得る。

系2.3. $A = \begin{pmatrix} -nw^2 & 1 \\ 1-knw^2 & n \end{pmatrix}$ $(\forall k \in \mathbb{Z})$, K を homology 3球面 Σ 内の knot とする。

(1) $M(T(nw\pm 1, w), K : A) \cong \chi_\Sigma(J(kw\pm 1, w : K);\ kw^2 - \frac{1}{n})$

(2) $\chi_\Sigma(K;\ k\pm\frac{1}{4}) \cong \chi_\Sigma(J(2k\pm 1, 2 : K);\ 4k\pm 1)$.

証明. (1)は定理2よりただちにわかる。また(2)は、$T((\mp 1)2\pm 1, 2) = T(\mp 1, 2)$ が再び trivial knot になること、$A = \begin{pmatrix} \pm 4 & 1 \\ 1\pm 4k & k \end{pmatrix}$ を用いて、(1)から出てくる。□

系2.3 の(2)は [FS, Theorem 2] を含む。

3.2 次に 2 bridge knot のある class $H(m,n)$ を扱う。

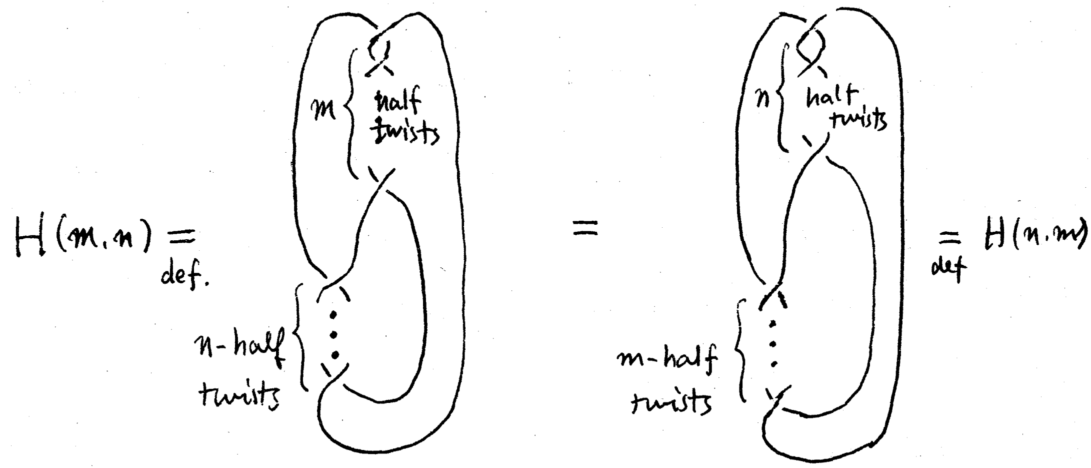

図 2.

knot であるために m, n ともに even, 一方が even 一方が odd でなければならない（図2からわかるように $H(m,n)=H(n,m)$ なので m が odd n が even と仮定して構わない。）。従って $H(m,2n)$ を考えてゆく。$H(m,2n)$ は $H(m,0)$ を n-twist して得られる。m が odd の時 $W=2$ で $A_o=\begin{pmatrix}-4n & 1\\ 1-4kn & k\end{pmatrix}$, m が even の時 $w=0$, $A_e=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & k\end{pmatrix}$ に対して定理2を使えば次が出る。

系 2.4　K は homology 3-sphere Σ 内の knot, $k\in\mathbb{Z}$ とする。

(1)
$$M(H(m,2n:A_o)) = \chi_\Sigma\left(H(m,2k:K):4k-\frac{1}{n}\right)$$

ここに m: odd で $H(m,2k:K)$ は $H(m,2k)$ から作る K の satellite.

(2) $M(H(2m,2n),K:A_e) \cong \chi_\Sigma(H(2m,2k:K):-\frac{1}{n})$

$$\cong \chi_\Sigma(H(2n,2k:K):-\frac{1}{m})$$

(3) $H(\pm 2, 2n) \underset{\mathrm{def}}{=} D_n^{\pm 1}$, $D_n^{\pm 1}(K)$: K a n-twisted double とする.

$$\chi_\Sigma(D_K^{\pm 1}(K):-\frac{1}{n}) \cong \chi_\Sigma(H(2n,k:K):\mp 1)。$$

証明。(1)は定理2より明らか. (2)もそうであるが あとの2つの同相は $H(2m,2n) = H(2n,2m)$ から来るものである。(3)は(2)から。□

3.3. 定理1の仮定を満たすknotsの族は定理2で扱ったもの以外に. solid torus 内の torus knot を特に $J_{p,q}$ で表わすと, $(J_{p/q}: m/n)$ がある torus knot の exterior を表わすことがある。Gordon [G, Lemma 7.2] は次のように述べている。

補題3. (Gordon) $(p,q)=1$, $q \geq 2$ とする.

$$(J_{p,q}: m/n) \cong \begin{cases} (1)\ S^1\times D^2 \# L(q,p) & m/n = pq,\ n=1. \\ (2)\ S^1\times D^2 & |npq-m|=1 \\ (3)\ \text{multiplicity } q,\ |npq-m| \text{ の singular fibres を持つ } D^2 \text{上の Seifert fibre space.} \end{cases}$$

補題3において，(2)から trivial knotのexteriorが得られるとみなせ，(3)のうち．$p \equiv m \pmod{q}$ かつ $p \equiv q \pmod{|m-npq|}$ となっている時，torus knot $T(m-npq, q)$ のexteriorが得られることが．fibrationのordinary fibreの追跡で言える。そこで定理1を使って，次の系を得る。

系1.2. K は homology 3-sphere Σ 内のknot，$A = \begin{pmatrix} nq^2 & t \\ m+knq^2 & kt+s \end{pmatrix}$，$\det A = -1$，$(p, q) = 1$．とする．

(1) $$\chi_\Sigma\left(K : \frac{m}{nq^2} + k\right) \cong \chi_\Sigma\left(J(kq+p, q : K) ; \frac{m}{n} + kq^2\right)$$

(2) $p \equiv m \ (|q|)$，$p \equiv q \ (|m-npq|)$ の時．

$$M(T(m-npq, q)', K ; A) \cong \chi_\Sigma\left(J((k-np)q+m, q : K) ; \frac{m}{n} + kq^2\right).$$

3.4. 注意．

(1) Brakes [B] は定理2と同様のアイデアで系2.2を示した。これは少くとも2つの異なるknotsからsurgeryにより，ひとつの3-manifoldが作れるかどうかの答えとなっている。また．

系2.1からもそのような例を作ることができる。系2.1は結局 S^3 内の各成分 T, J が trivial で $lk(T, J) = w$ の link $L = T \cup J$ を考え、Tには係数 $-\frac{1}{k}$、Jには係数 $-\frac{1}{n}$ を付して得られる3-manifoldのknotによるsurgery表現の間の変換を意味している。TとJが S^3 のisotopyで互いに移りあえ、$w \neq 0$、$k \neq n$ ならば、Alexander polynomialの計算により $T_n(0)$ と $J_k(0)$ が異なるknot typeを持つことを示すことができる。

(2) 本稿の内容は、[Mr]を修正、一般化したものである。他方向への応用等についてはこれを参照されたい。

REFERENCES

[W] W. Brakes, Manifolds with multiple knot-surgery descriptions, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 87(1980), 443-448.

[FS] R. Fintushel and R. Stern, Constructing lens spaces by surgery on knots, Math. Zeit. 175(1980), 33-51.

[G] C.McA. Gordon, Dehn surgery and satellite knots, preprint.

[Mr] N. Maruyama, Knot surgery descriptions of some closed orientable 3-manifolds---preliminary notes, preprint.

[Mt] Y. Matsumoto, On the bounding genus of homology 3-spheres, preprint.